

文章编号: 1000-7598-(2006)08-1369-05

三维离散块体边-边接触模拟

姜清辉^{1,2}, 张 煜¹

(1. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉 430072; 2. 中国科学院 岩土力学重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 任意形状块体的接触模拟是发展三维不连续变形分析方法(3D-DDA)的关键问题。提出了三维离散块体单元的边-边接触模型, 并给出了边-边接触进入面的判定方法和嵌入准则。基于矢量分析和罚函数法, 推导了接触子矩阵的表达式, 算例分析结果表明了该模型的有效性。

关 键 词: 3D-DDA; 边-边接触; 进入面; 嵌入准则

中图分类号: O 242.1

文献标识码: A

Edge-to-edge contact simulation for three-dimensional distinct block system

JIANG Qing-hui^{1,2}, ZHANG Yu¹

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

2. Key Laboratory of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: A contact theory governing the discontinuous contacts between arbitrarily shaped polyhedral blocks is a major component of three-dimensional discontinuous deformation analysis method (3D-DDA). An edge-to-edge contact model, which forms a part of the contact theory, is proposed. Details are given including the detection of edge-to-edge contact type, judging of the first entrance faces, and the criteria for inter-penetration. Contact submatrices are derived by vector analysis and the penalty function method. This edge-to-edge contact model has been implemented into a 3D-DDA computer program. Two verification cases demonstrate the validity of the model and the capability of 3D-DDA to deal with large movements and multi-block interaction.

Key words: 3D-DDA; edge-to-edge contact; entrance faces; criteria for inter-penetration

1 引 言

二维有限元法提出后不久就成功地推广为三维有限元法, 但把不连续变形分析方法(DDA)从二维推广到三维比有限元复杂得多。近年来国内外一些学者开始致力于三维 DDA 的研究, 并且发表了相应的成果。文献[1]在二维基础上推导了三维 DDA 的理论公式, 给出了各子矩阵的具体表达式; 文献[2]探讨了三维 DDA 基本原理, 并进行了块体的倾倒破坏分析; 文献[3]在一阶线性位移模式条件下, 基于最小势能原理建立了三维 DDA 正分析模型; 文献[4]发展了一个为三维块体建模的前处理器。DDA 的关键是建立离散块体的接触进入理论, 考虑到岩体中节理、裂隙等结构面大多可以视为由面-面接触组成, 文献[5]提出了三维 DDA 的点-面接触模型, 重点讨论了三维块体的角-面、边-面以及面-

面接触; 对于角-角、角-边、边-边等非光滑接触问题, 文献[6]提出利用离散元的“公共面”作为 DDA 的“进入面”, 但其做法值得商榷。与离散元显式的中心差分格式不同, DDA 采用隐式法, 在同一个时步内接触点的侵入位置和侵入距离可能会发生变化, 需反复迭代求解, 也就是说, DDA 的接触侵入位置(或称之为“进入面”)并不是唯一的, 与“公共面”有着明显的不同。作为三维 DDA 接触理论的一部分, 本文在点-面接触模型的基础上, 进一步发展了三维块体边-边接触模拟方法和求解技术, 并基于矢量分析和罚方法给出了详细的理论推导。

2 三维 DDA 的基本原理

2.1 块体位移及变形

DDA 分时步进行计算, 大位移和大变形是由小位移、小变形累加而成。假定每个时间步满足小位

收稿日期: 2004-10-22

修改稿收到日期: 2005-01-24

基金项目: 国家自然科学基金(No. 50309010), 国家自然科学基金雅砻江水电开发联合研究基金重点项目(No. 50539100), 水资源与水电工程科学国家重点实验室开放基金(No. 2003C004), 中国科学院岩土力学重点实验开放基金(No. 206152152)资助。

作者简介: 姜清辉, 男, 1972 年生, 博士, 副教授, 主要从事岩土力学数值方法与施工仿真方面的教学与科研工作。E-mail: jqh1972@yahoo.com.cn

移、小变形条件。设每个块体处处具有常应力、常应变,块体的运动及变形由 12 个独立的变形参数确定:

$$[D_i] = [u_0, v_0, w_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T \quad (1)$$

块体中任意点 \$(x, y, z)\$ 的位移可由变形变量 \$[D_i]\$ 表示:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [T_i] [D_i] \quad (2)$$

$$[T_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(z-z_0) & y-y_0 \\ z-z_0 & 0 & -(x-x_0) \\ -(y-y_0) & (x-x_0) & 0 \\ (x-x_0) & 0 & 0 \\ 0 & (y-y_0) & 0 \\ 0 & 0 & (z-z_0) \\ (y-y_0)/2 & (x-x_0)/2 & 0 \\ 0 & (z-z_0)/2 & (y-y_0)/2 \\ (z-z_0)/2 & 0 & (x-x_0)/2 \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

式中 \$(u_0, v_0, w_0)\$ 为块体质心 \$(x_0, y_0, z_0)\$ 的刚体平移; \$(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)\$ 为块体绕 \$x, y, z\$ 轴的转角; \$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})\$ 为块体的 3 个正应变和 3 个剪应变。

2.2 总体平衡方程

通过块体之间的约束和作用在各块体上的位移约束条件,把若干个单独的块体连接起来,并构成一个块体系统。假设所定义的块体系统有几个块体,联立平衡方程具有如下形式:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

因为每个块体有 12 个自由度,所以式 (4) 的系数矩阵中,每个元素 \$k_{ij}\$ 为 \$12 \times 12\$ 阶子矩阵; \$D_i\$ 和 \$F_i\$ 为 \$12 \times 1\$ 阶子矩阵, \$D_i\$ 为块体 \$i\$ 的变形变量; \$F_i\$ 为块体 \$i\$ 分配到 12 个变形变量的荷载。子矩阵 \$[k_{ii}]\$ 与块体 \$i\$ 的材料特性有关, \$[k_{ij}]\$ (\$i \neq j\$) 则由块体 \$i\$ 与块体 \$j\$ 之间的接触和约束条件决定。

由给定的常应变位移模式,根据变分原理,总体平衡方程可以通过对应力及外力(包括惯性力和阻尼力)作用下的总势能 \$\Pi_p\$ 求得,即总势能最小:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi_p}{\partial d_{ri} \partial d_{sj}} \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots, 12) \quad (5)$$

$$F_i = -\frac{\partial \Pi_p}{\partial d_{ri}} \Big|_{[D_i]=0} \quad (r = 1, 2, 3, \dots, 12) \quad (6)$$

3 三维块体边-边接触的模拟

3.1 进入面的判定和嵌入准则

对于三维块体的边-边接触,根据 2 条接触边的几何关系可以划分成如下 2 种基本类型:

(1) 2 条接触边平行,如图 1(a)和图 1(b)所示。

此时三维的边-边接触和二维的角-角接触是类似的,对如图 1(a)所示的情形,边-边接触可以转化成 2 个二维的凸角与凸角的接触。对如图 1(b)所示的情形,边-边接触可以转化成 2 个二维的凸角与凹角的接触。对每一个接触而言,存在 2 个进入面,有关进入面的判定和嵌入准则可参考文献[7],所不同的是二维的进入线变成了进入面,即进入线所在的平面。

(2) 2 条接触边不平行,如图 1(c)所示。此时只存在一个进入面,即由 2 条接触边 \$P_1P_2\$ 和 \$P_3P_4\$ 所组成的平面,块体发生相互侵入的充要条件,即嵌入准则为

$$(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_3P_4}) \cdot \overrightarrow{P_3P_1} < 0 \quad (7)$$

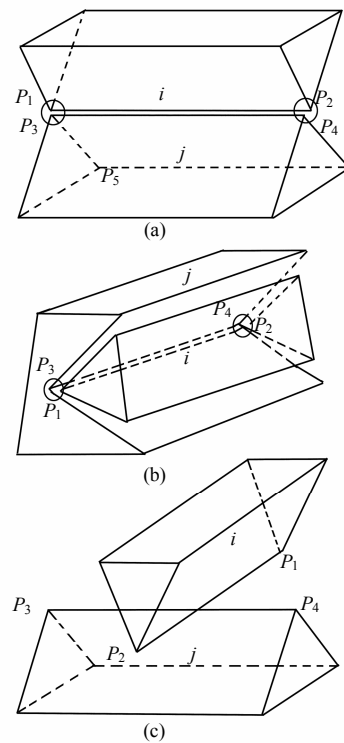


图 1 边-边接触模型

Fig.1 Edge-to-edge contact model

3.2 接触子矩阵

对于边-边接触这类非光滑接触, 只需在接触点和进入面之间设置法向弹簧阻止块体相互侵入, 没有剪切弹簧和摩擦力子矩阵被需要。

(1) 2 条接触边平行。如图 1(a)所示, 假定 P_i 是块体 i 的一顶点, 平面 $P_3P_4P_5$ 是进入面, 记 (x_i, y_i, z_i) 和 (u_i, v_i, w_i) 分别为顶点 $P_i (i=1, 3, 4, 5)$ 的坐标和位移, $\vec{n}$ 为进入面 $P_3P_4P_5$ 的外单位法向矢量, 则点 P_i 到进入面的法向距离为

$$\begin{aligned} d_n = \vec{n} \overrightarrow{P_3P_i} = & \frac{\mathbf{S}_0}{l} + \frac{1}{l} (e_{11} \ e_{12} \ e_{13}) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{l} (e_{21} \ e_{22} \ e_{23}) \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} + \\ & \frac{1}{l} (e_{31} \ e_{32} \ e_{33}) \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{l} (e_{41} \ e_{42} \ e_{43}) \begin{pmatrix} u_5 \\ v_5 \\ w_5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$e_{11} = (y_4 - y_3)(z_5 - z_3) + (y_5 - y_3)(z_3 - z_4) \quad (9)$$

$$e_{12} = (z_4 - z_3)(x_5 - x_3) + (x_3 - x_4)(z_5 - z_3) \quad (10)$$

$$e_{13} = (x_4 - x_3)(y_5 - y_3) + (y_3 - y_4)(x_5 - x_3) \quad (11)$$

$$e_{31} = (z_1 - z_3)(y_5 - y_3) + (y_1 - y_3)(z_3 - z_5) \quad (12)$$

$$e_{32} = (z_5 - z_3)(x_1 - x_3) + (x_5 - x_3)(z_3 - z_1) \quad (13)$$

$$e_{33} = (y_1 - y_3)(x_5 - x_3) + (y_3 - y_5)(x_1 - x_3) \quad (14)$$

$$e_{41} = (y_1 - y_3)(z_4 - z_3) + (y_4 - y_3)(z_3 - z_1) \quad (15)$$

$$e_{42} = (z_1 - z_3)(x_4 - x_3) + (x_1 - x_3)(z_3 - z_4) \quad (16)$$

$$e_{43} = (y_4 - y_3)(x_1 - x_3) + (y_3 - y_1)(x_4 - x_3) \quad (17)$$

$$e_{21} = -(e_{11} + e_{31} + e_{41}) \quad (18)$$

$$e_{22} = -(e_{12} + e_{32} + e_{42}) \quad (19)$$

$$e_{23} = -(e_{13} + e_{33} + e_{43}) \quad (20)$$

$$\mathbf{S}_0 = [e_{11} \ e_{12} \ e_{13}] [x_1 - x_3 \ y_1 - y_3 \ z_1 - z_3]^T \quad (21)$$

$$l = \sqrt{e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2} \quad (22)$$

如果点 P_i 侵入进入面 $P_3P_4P_5$, 则 d_n 为负值。由于点 P_i 属于块体 i , 点 P_3, P_4, P_5 属于块体 j , 代入位移公式(2)可得

$$\mathbf{d}_n = \frac{\mathbf{S}_0}{l} + [E_i][D_i] + [G_j][D_j] \quad (23)$$

此处, 有

$$[E_i] = [e_{21} \ e_{22} \ e_{23}] [T_i(x_1, y_1, z_1)]/l \quad (24)$$

$$\begin{aligned} [G_j] = & [e_{21} \ e_{22} \ e_{23}] [T_j(x_3, y_3, z_3)]/l + \\ & [e_{31} \ e_{32} \ e_{33}] [T_j(x_4, y_4, z_4)]/l + \\ & [e_{41} \ e_{42} \ e_{43}] [T_j(x_5, y_5, z_5)]/l \end{aligned} \quad (25)$$

假定点 P_i 和进入面 $P_3P_4P_5$ 之间有一法向弹簧, 记其刚度为 p_n (数学上称之为罚参数, 其值一般为 $10E \sim 1\ 000E$, E 为块体弹性模量), 则接触弹簧的应变能为

$$\Pi_n = \frac{p_n}{2} \left(\frac{\mathbf{S}_0}{l} + [E_i][D_i] + [G_j][D_j] \right)^2 \quad (26)$$

对 Π_n 求导使其极小化, 可得 4 个 12×12 阶子矩阵和 2 个 12×1 阶子矩阵并分别加到总体平衡方程(4)的子矩阵 $[K_{ii}], [K_{ij}], [K_{ji}], [K_{jj}], [F_i]$ 和 $[F_j]$ 中。

$$\left. \begin{aligned} p_n [E_i]^T [E_i] &\rightarrow [K_{ii}] \\ p_n [E_i]^T [G_j] &\rightarrow [K_{ij}] \\ p_n [G_j]^T [E_i] &\rightarrow [K_{ji}] \\ p_n [G_j]^T [G_j] &\rightarrow [K_{jj}] \\ -\frac{p_n S_0}{l} [E_i]^T &\rightarrow [F_i] \\ -\frac{p_n S_0}{l} [G_j]^T &\rightarrow [F_j] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(2) 2 条接触边不平行。值得注意的是, 此时的进入面由接触的 2 条边 P_1P_2 和 P_3P_4 组成, 并不属于任何一个块体的表面, 如图 1(c)所示。记 $\vec{n}$ 为进入面的外单位法向矢量(由块体 i 指向块体 j), 则点 P_i 到进入面的法向距离为

$$\begin{aligned} d_n = \vec{n} \overrightarrow{P_3P_i} = & \frac{\mathbf{S}_0}{l} + \frac{1}{l} [e_{21} \ e_{22} \ e_{23}] \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{l} [e_{31} \ e_{32} \ e_{33}] \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} + \\ & \frac{1}{l} [e_{41} \ e_{42} \ e_{43}] \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{l} [e_{51} \ e_{52} \ e_{53}] \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$e_{11} = (y_2 - y_1)(z_4 - z_3) + (y_4 - y_3)(z_1 - z_2) \quad (29)$$

$$e_{12} = (z_2 - z_1)(x_4 - x_3) + (x_1 - x_2)(z_4 - z_3) \quad (30)$$

$$e_{13} = (x_2 - x_1)(y_4 - y_3) + (y_1 - y_2)(x_4 - x_3) \quad (31)$$

$$e_{21} = (y_2 - y_3)(z_4 - z_3) + (y_4 - y_3)(z_3 - z_2) \quad (32)$$

$$e_{22} = (z_2 - z_3)(x_4 - x_3) + (x_3 - x_2)(z_4 - z_3) \quad (33)$$

$$e_{23} = (x_2 - x_3)(y_4 - y_3) + (y_3 - y_2)(x_4 - x_3) \quad (34)$$

$$e_{31} = (z_1 - z_3)(y_4 - y_3) + (y_1 - y_3)(z_3 - z_4) \quad (35)$$

$$e_{32} = (z_1 - z_3)(x_3 - x_4) + (x_1 - x_3)(z_4 - z_3) \quad (36)$$

$$e_{33} = (y_3 - y_4)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_3)(x_4 - x_3) \quad (37)$$

$$e_{41} = (y_2 - y_1)(z_1 - z_4) + (y_4 - y_1)(z_2 - z_1) \quad (38)$$

$$e_{42} = (z_4 - z_1)(x_2 - x_1) + (x_1 - x_4)(z_2 - z_1) \quad (39)$$

$$e_{43} = (y_1 - y_4)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)(x_4 - x_1) \quad (42)$$

$$e_{51} = (z_2 - z_1)(y_1 - y_3) + (y_1 - y_2)(z_1 - z_3) \quad (41)$$

$$e_{52} = (x_2 - x_1)(z_1 - z_3) + (z_1 - z_2)(x_1 - x_3) \quad (42)$$

$$e_{53} = (y_2 - y_1)(x_1 - x_3) + (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) \quad (43)$$

$$l = \sqrt{e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2} \quad (44)$$

$$S_o = [e_{11} \ e_{12} \ e_{13}] [x_1 - x_3 \ y_1 - y_3 \ z_1 - z_3]^T \quad (45)$$

如果 2 个接触块体有相互侵入, 则 d_n 为负值。由于点 P_1 , P_2 属于块体 i , 点 P_3 , P_4 属于块体 j , 代入位移公式(2)可得

$$d_n = \frac{S_o}{l} + [M_i][D_i] + [N_j][D_j] \quad (46)$$

此处

$$[M_i] = [e_{21} \ e_{22} \ e_{23}] [T_i(x_1, y_1, z_1)]/l + [e_{31} \ e_{32} \ e_{33}] [T_i(x_2, y_2, z_2)]/l \quad (47)$$

$$[N_j] = [e_{41} \ e_{42} \ e_{43}] [T_j(x_3, y_3, z_3)]/l + [e_{51} \ e_{52} \ e_{53}] [T_j(x_4, y_4, z_4)]/l \quad (48)$$

假定点 P_1 和进入面之间有一法向弹簧, 记其刚度为 p_k , 则接触弹簧的应变能为

$$\Pi_k = \frac{p_k}{2} \left(\frac{S_o}{l} + [M_i][D_i] + [N_j][D_j] \right)^2 \quad (49)$$

对 Π_k 求导使其极小化, 可得 4 个 12×12 阶子矩阵和 2 个 12×1 阶子矩阵, 并分别加到总体平衡

方程 (4) 的子矩阵 $[K_{ii}]$, $[K_{ij}]$, $[K_{ji}]$, $[K_{jj}]$, $[F_i]$ 和 $[F_j]$ 中。

$$\left. \begin{aligned} p_k [M_i]^T [M_i] &\rightarrow [K_{ii}] \\ p_k [M_i]^T [N_j] &\rightarrow [K_{ij}] \\ p_k [N_j]^T [M_i] &\rightarrow [K_{ji}] \\ p_k [N_j]^T [N_j] &\rightarrow [K_{jj}] \\ -\frac{p_k S_o}{l} [M_i]^T &\rightarrow [F_i] \\ -\frac{p_k S_o}{l} [N_j]^T &\rightarrow [F_j] \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

4 数值算例

4.1 多体运动

为了检验本文所发展的边-边接触模型, 特意构造了一个含有 2 类边-边接触问题的离散块体系统。如图 2 所示, 模型几何尺寸为 $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$, 底面固定, 荷载为块体自重, 块体接触界面摩擦角 $\varphi = 20^\circ$, 凝聚力 $c = 0$ 。图 3 给出了时步为 300 时的计算结果。从图中可以看出, 所有的接触, 包括边-边接触, 没有相互侵入发生, 块体系统发生的运动及变形情况是符合实际的, 这个例子也反映了 DDA 在多体动力学仿真分析方面的能力和优势。

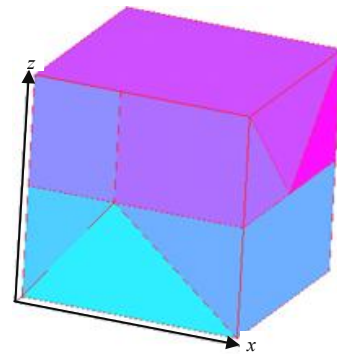


图 2 离散块体系统
Fig.2 A system of multi-block

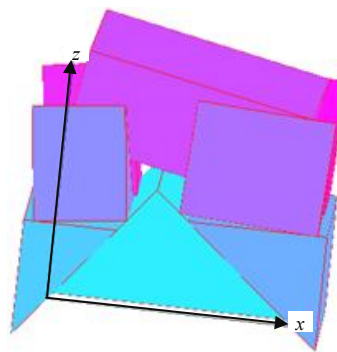


图 3 300 时步的计算结果
Fig.3 Large movement of multi-block system at 300 time-step

4.2 节理岩柱

如图 4 所示, 岩柱型的几何尺寸是 $5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 10\text{ m}$, 受到 2 组节理面 ($40^\circ \angle 30^\circ \angle$; $120^\circ \angle 60^\circ$) 的切割, 所有节理面的摩擦角和凝聚力被假定为 0。该计算模型底部边界被施加固定约束, 其他边界自由, 在变形之前共含有 30 个第 1 种类型的边-边接触。图 5 给出了时步为 500 时的计算结果。从图中可以看出, 节理岩柱的变形行为以及最后的失稳解体主要受其结构面的空间特性所影响和控制。



图 4 节理岩柱

Fig.4 A column of jointed rock

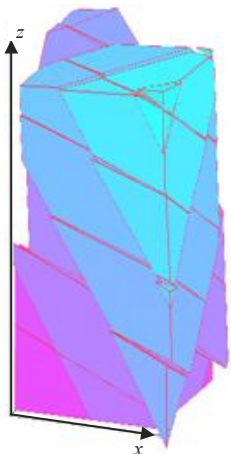


图 5 500 时步计算结果

Fig.5 Deformation of the column at time-step 500

5 结 论

发展三维 DDA 的关键是解决接触问题, 必须发展一个可以控制许多三维块体相互作用的完善的接触理论。作为这个理论的一部分, 本文建立了三

维块体的边-边接触模型, 给出了边-边接触进入面的判定方法和嵌入准则, 并基于空间矢量分析和罚函数法详细推导了接触子矩阵, 算例分析结果表明了该模型的有效性。

参 考 文 献

- [1] Shi G H. Three dimensional discontinuous deformation analysis[A]. **Proc. 38th U.S. Rock Mech Symp**[C]. Washington D C:[s.n.], 2001.
- [2] Jang H I, Lee C I. Development of a three-dimensional discontinuous deformation analysis technique and its application to toppling failure[A]. **Proceedings of 5th International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation**[C]. [s. l.]: Balkema A A. 2002. 225—229.
- [3] 姜清辉, 杨文柱, 丰定祥. 三维块体系统非连续变形正分析模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(12): 1 765—1 769.
JIANG Qing-hui, YEUNG Wen-zhu, FENG Ding-xiang. Three-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling[J]. **Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2002, 21(12): 1 765—1 769.
- [4] 郑榕明, 陈文胜, 葛修润. 节理岩体三维块体系统面向对象的数据结构[J]. 岩土力学, 2002, 23(1): 55—59.
ZHENG Ru-ming, CHEN Wen-sheng, GE Xiu-run. Data structure for three-dimensional block system based on object-oriented programming[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2002, 23 (1): 55—59.
- [5] Jiang Q H, Yeung M R. A model of point-to-face contact for three-dimensional discontinuous deformation analysis [J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 2004, 37(2): 95—116.
- [6] Liu J, Kong X J. Development of three dimensional discontinuous deformation analyses[A]. **Proceedings of the 6th international conference on analysis of discontinuous formation**[C]. Norway: [s. n.], 2003.
- [7] Shi G H. Discontinuous deformation analysis—a new numerical model for the statics and dynamics of block system[D]. Berkeley: Dept. of Civil Engineering, University of California, 1988.